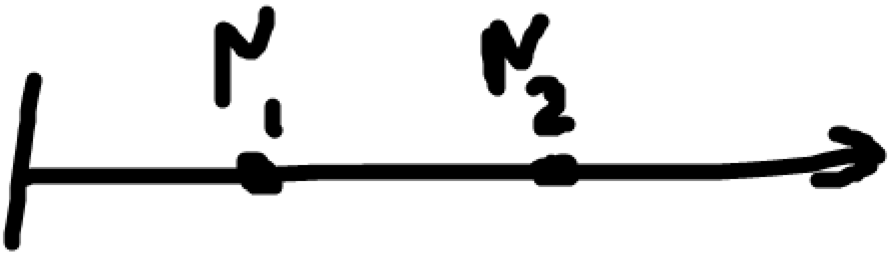
Про космологию можно говорить много и долго, но в нашем ознакомительном курсе мы лишь к ней прикоснёмся, посмотрев на вывод постоянной Хаббла.

Вернёмся к метрике Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dct^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

Задача: найти расстояние между двумя точками на радиусе:



Что тут думать – очевидно, $|r_2 - r_1|$. А вот и нет, лалки:

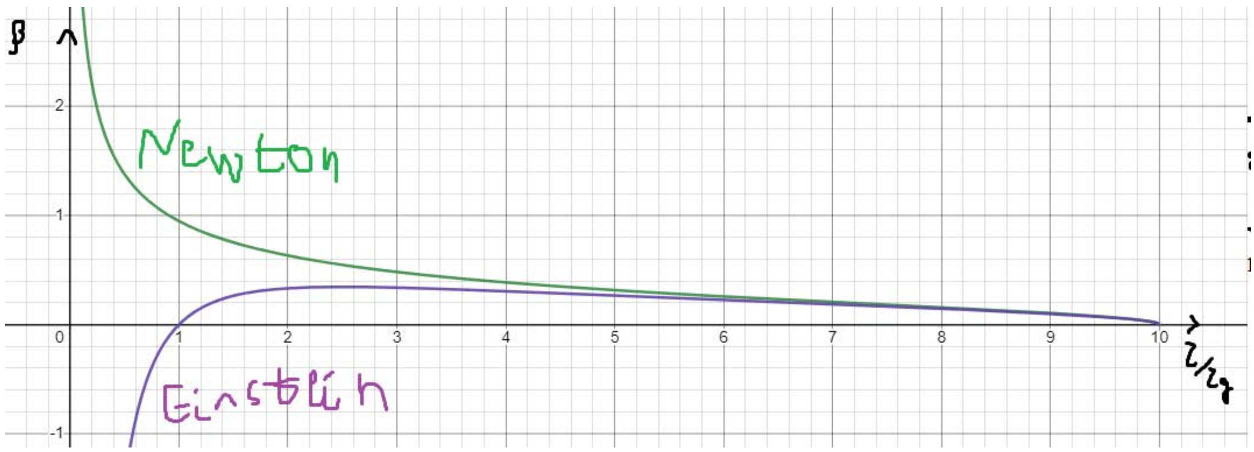
$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} dr$$

Потому что в метрике вот эта дрянь стоит:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dct^2 - \left(\frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}\right)^2$$

Что за безобразие! Где это видано, где это слыхано, чтобы расстояние между двумя точками на числовой оси не равнялось модулю разности? Во Шварцшильд дурак со своей метрикой!

(Теперь, кстати, понятно, откуда берётся это странное неньютоновское замедление беты:



Потому что при близких расстояниях при малом изменении dr истинное расстояние ds меняется настолько сильно, что кажущаяся бета dr/dct при постоянной ds/dсобственное время начинает резко уменьшаться).

На самом деле Шварцшильд не совсем дурак. Он, вводя свою метрику, руководствовался следующими соображениями: коли у нас с 3-пространством будет полный кирдык (оно будет неевклидово), то пускай хоть площадь сферы (это такое ГМТ, для которого $r = const$) будет $4\pi r^2$.

Разумеется, не всем понравилась метрика Шварцшильда. Можете погуглить, например, метрику Крускала, ещё были какие-то метрики (я уже не помню). Все они из расчёта «нос поднимешь – хвост увязнет»: попытаешься повторить какое-то свойство евклидова пространства - другие не повторяются.

Вообще настоящая проблема ОТО – это метрики. Их можно придумать очень много (лишь бы удовлетворяли уравнению Эйнштейна), а уж физический смысл «вдохнуть» в буквы – это задача вторичная.

Вот Фридман для Вселенной предложил следующую очень хорошую СК с метрикой:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dX^2$$

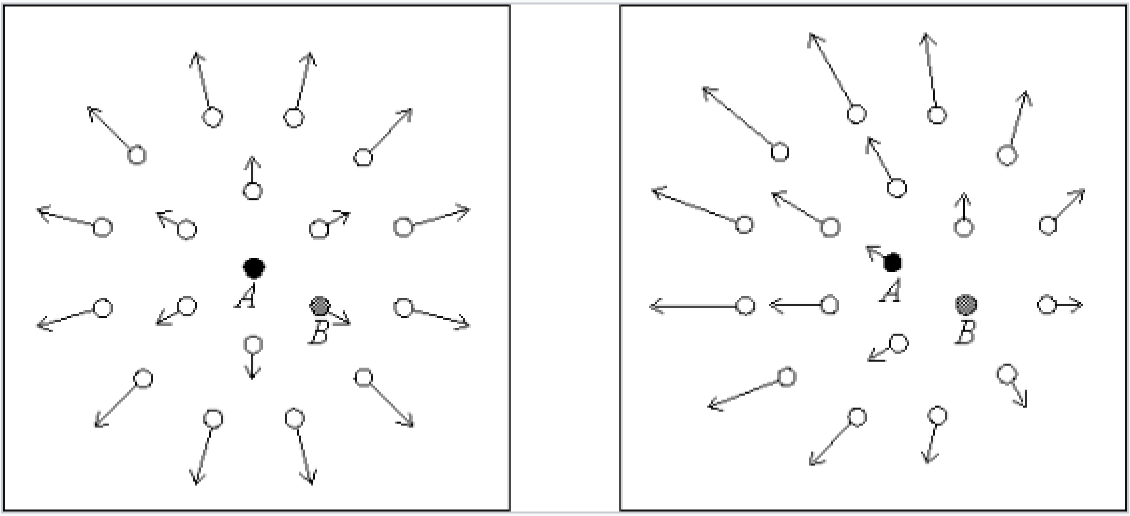
Где величина X является функцией трёх пространственных координат, но не времени.

Вообще говоря, мы будем рассматривать простой случай – когда $dX^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ - обычное евклидово 3-пространство. Можно рассмотреть случай «кривого» 3-пространства, но нафиг оно надо, нам и евклидова 3-пространства хватит.

Такая СК называется ***синхронной*** – время во всех точках 3-пространства (т.е. Вселенной) течёт одинаково. В самом деле, возьмём две точки с фиксированной координатой: $dX_1 = dX_2$. Но тогда и ${ds_1}^2 = ds_2^2$.

Т.е. два наших наблюдателя в разных точках Вселенной будут стареть с одинаковой скоростью. Разумеется, в этом случае (и только в этом случае) можно было бы говорить о едином возрасте Вселенной – как раз счёт того, что для покоящихся предметов в разных точках Вселенной время течёт одинаково.

Но за счёт того, что со временем всё хорошо, с пространством у нас возникают приколы. Расстояние между объектами растёт со временём. Ну там расширение Вселенной, знаете.



График, иллюстрирующий независимость закона Хаббла от положения галактики, из которой производится наблюдение. Слева: точка наблюдения — галактика A, справа: точка наблюдения — галактика B

И закон Хаббла можно отсюда же вывести. Это делается очень легко.

Перейдём в 2D: всего две координаты, t и r.

Рассмотрим свет в два момента времени: t и $t + dt$.
Для света всегда

$$ds^2 = 0$$

поэтому

$$dt = a(t)dr$$

Т.е. величина $\frac{1}{a(t)} = c(t)$ имеет смысл «кажущейся» скорости света.

Это означает, что на расстоянии r от наблюдателя

$$\lambda(r) = c(r)T$$

А на расстоянии r+dr

$$\lambda(r + dr) = c(r + dr)T$$

$$\frac{d\lambda(r)}{dr} = \frac{dc(r)}{dr} = \frac{d\left(\frac{1}{a(t)}\right)}{dt}$$

Вот мы и получили зависимость красного смещения от расстояния до наблюдателя.

Ответ обычно записывают иначе: берут производную

$$\frac{d\lambda(r)}{dr} = \frac{\dot{a}(t)}{a^2(t)}$$

И перекидывают $a(t)$ в левую часть, получая уже в чистом виде закон Хаббла:

$$\frac{dv(r)}{dr} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

Т.к. экспериментально обнаружено для разделения галактик $v = Hr$, то постоянная Хаббла H оказывается равной $\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$.

Видно, кстати, что если зависимость $a(t)$ не линейная (чтобы $\dot{a}(t)$ было постоянной), постоянная Хаббла вовсе не константа. Это не косяк модели, это так и есть экспериментально – просто изменяется она очень слабо.